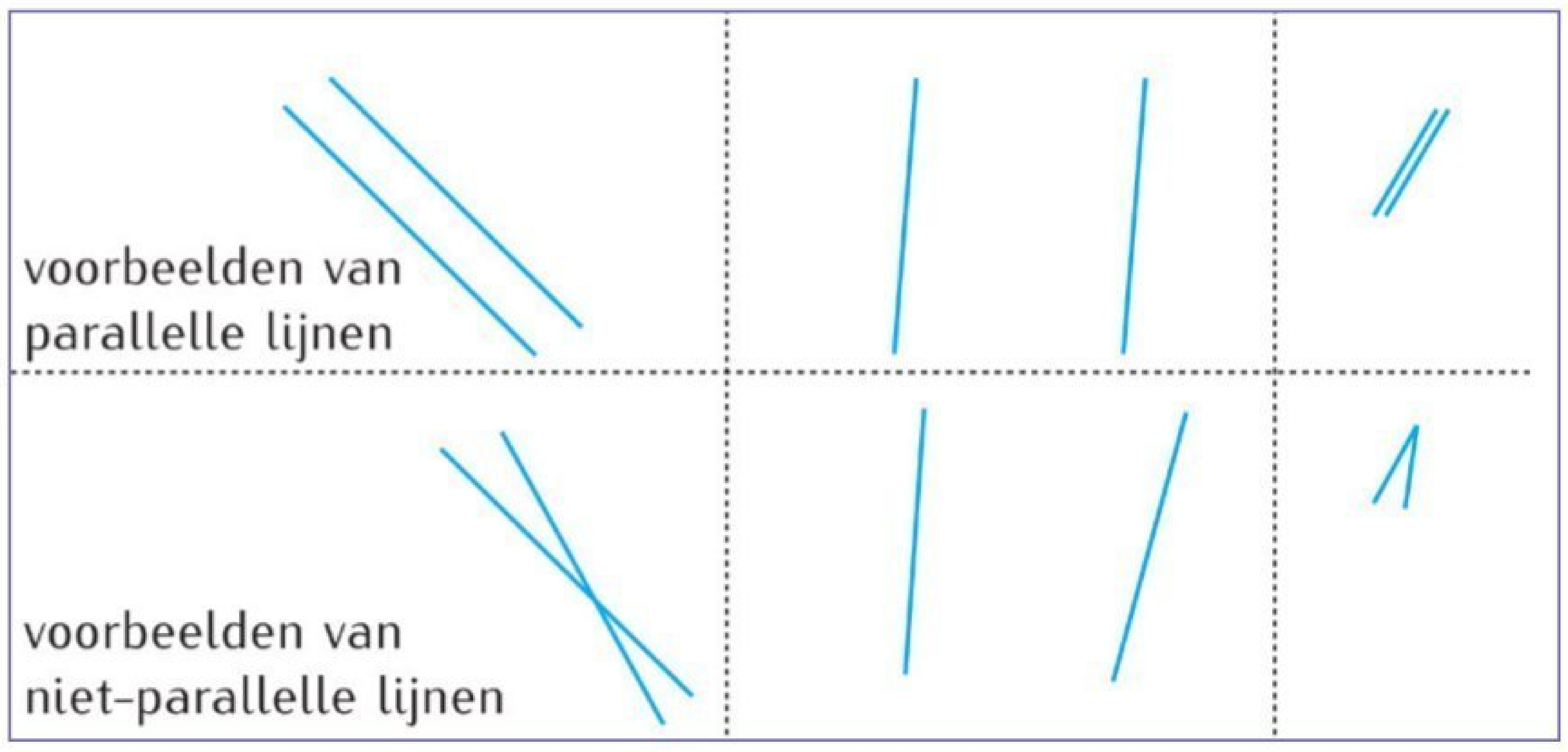
Dédé de Haan, Hella de Vries

Het FIzier gericht op…
Toepassing van variatietheorie in het wiskundeonderwijs

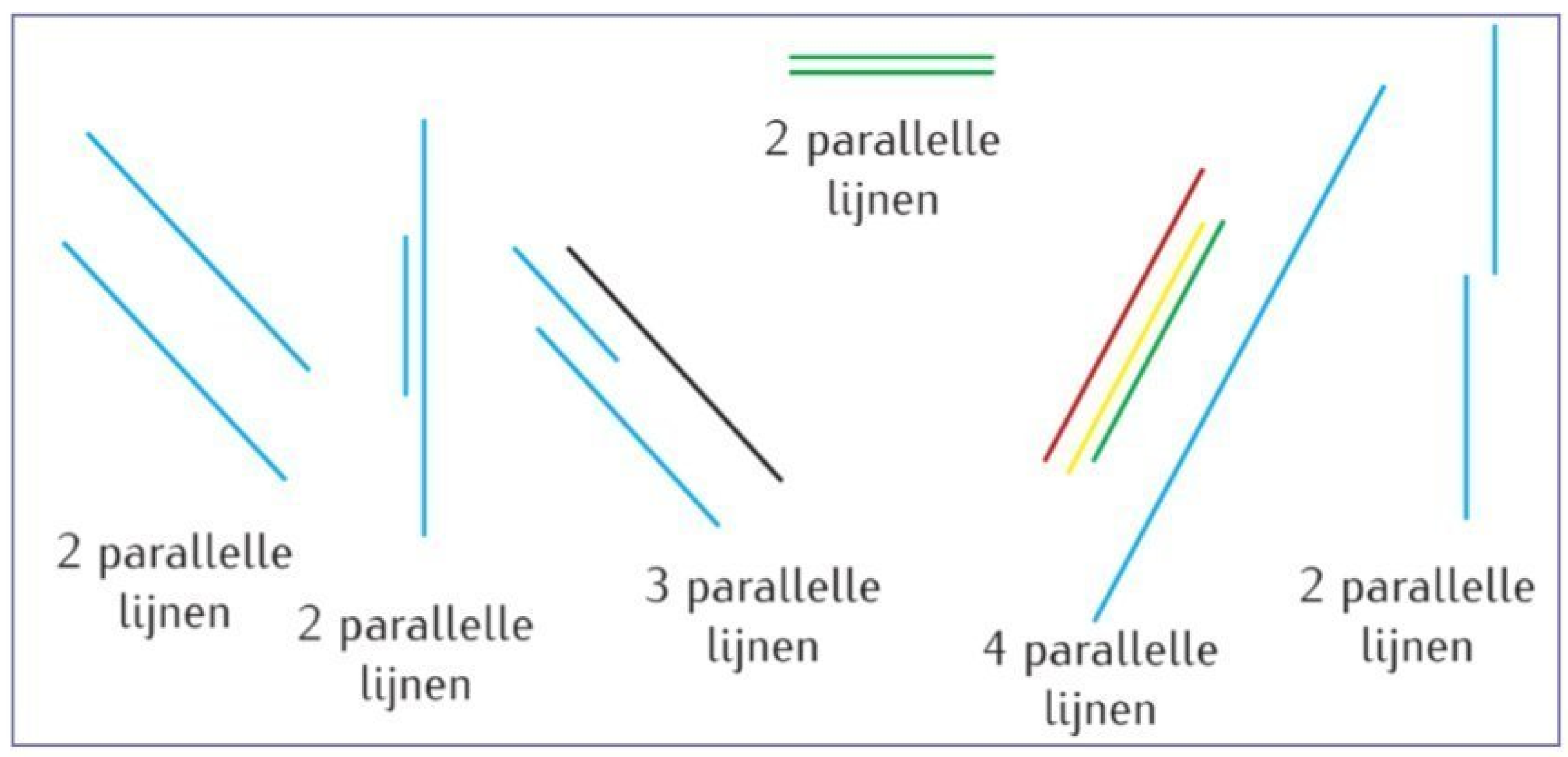
In dit artikel legt Dédé de Haan uit hoe het toepassen van variatietheorie kan helpen bij het vinden van de hoogte in een driehoek, om daarmee de oppervlakte te berekenen. Hella de Vries ontwikkelde een onderzoeksles voor 2 vmbo met een aantal medestudenten (NHLStenden Hogeschool) en voerde de les uit.

Leren door variatie

Variatietheorie is in Europa geïntroduceerd door Ference Marton[1], [2], een Zweedse hoogleraar onderwijskunde. Deze theorie gaat ervan uit dat het leren van iets gaat over het zien of ervaren van kenmerkende aspecten ervan. Om deze te kunnen onderscheiden, en om erop te kunnen focussen, moet je variatie ervaren, zodat je weet wat het wel is en wat het niet is (je weet alleen wat ‘drie’ is als je ook weet wat ‘niet-drie’ is). Een voorbeeld hiervan is in GeoGebra een aantal lijnen tekenen van de functie $y = ax + b$, bijvoorbeeld: $y = x$, $y = 2x$, $y = 3x$, $y = -x$, etc. met de bedoeling leerlingen inzicht te laten krijgen in wat de waarde van a te maken heeft met hoe de grafiek eruitziet. Het doel: zelf een lijn met willekeurige waarde van a kunnen tekenen, en kunnen formuleren hoe een lijn eruitziet met een bepaalde waarde van a, inclusief de lijn waarbij $a = 0$. Vervolgens lijnen met een waarde voor b toevoegen, en nu eerst de waarde van a vasthouden en variëren met b, zodat leerlingen een waarde van b verbinden met wat dat betekent voor de grafiek. Uiteindelijk zowel a als b variëren, en zelf laten tekenen.[3] Dit is allemaal geen nieuwe didactiek, ook niet voor het Nederlands wiskundeonderwijs. Wij noemen dit ‘het leren door voorbeelden (en non-voorbeelden)’. Wat er wel anders aan is, is de systematische nadruk op de essentiële kenmerken van het wiskundig concept, waardoor je van tevoren heel goed nadenkt over de voorbeelden en non-voorbeelden die je geeft, en daarna over de standaard- en niet-standaardvoorbeelden die je geeft, waarbij je de niet-essentiële kenmerken varieert, zodat de leerling met een ‘flexibele’ blik leert kijken. Zo is $3x + 4 = 2$ een eerstegraadsvergelijking, maar $4 = 2 - 3x$ is dezelfde eerstegraadvergelijking, en $0 = z + 1$ is óók een eerstegraadsvergelijking. De essentiële kenmerken zijn immers: het moet een relatie zijn met een = - teken tussen twee expressies en een onbekende tot de eerste macht. Aan welke kant van het = - teken de onbekende staat, of de onbekende een x is of een andere variabele, dat is niet-essentieel, dus daar varieer je dan in. Of over de evenwijdigheid van lijnen, zoals te zien is in figuur 1 en 2.



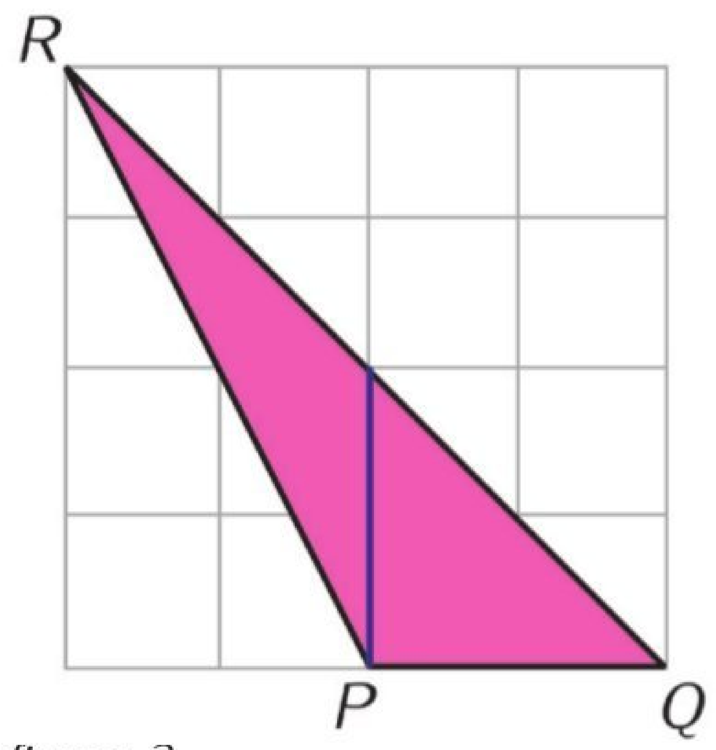
figuur 1 Voorbeelden en non-voorbeelden van parallelle lijnen



figuur 2 Standaardvoorbeelden en niet-standaardvoorbeelden van parallelle lijnen, waarbij de niet-essentiële kenmerken (zoals aantal lijnen, kleur, lengte, richting, grootte van de afstand) gevarieerd worden, zodat duidelijk wordt dat het essentiële kenmerk invariant is

Variatietheorie toegepast in 2 vmbo

Bij het bepalen van de oppervlakte van een driehoek hebben we een hoogte en een bijbehorende zijde nodig. Een groep van drie studenten van de lerarenopleiding wiskunde aan NHLStenden Hogeschool onderzocht de kennis van klas 2 vmbo kader/tl op hun scholen op dit gebied. Ze voerden een Learning Study uit: een Lesson Study waarbij gebruik gemaakt wordt van variatietheorie. Uit eigen ervaring, die van collega's en vanuit de literatuur wisten de leraren in opleiding inmiddels dat niet iedere leerling gemakkelijk de hoogte van een driehoek bij een bijbehorende zijde kan bepalen. Dit werd bevestigd door hun voorkennisonderzoek. Leerlingen hadden geleerd dat de hoogte van een driehoek bepaald werd door een lijn die vanuit een hoekpunt van de driehoek getrokken werd, en die loodrecht op de basis stond.



figuur 3

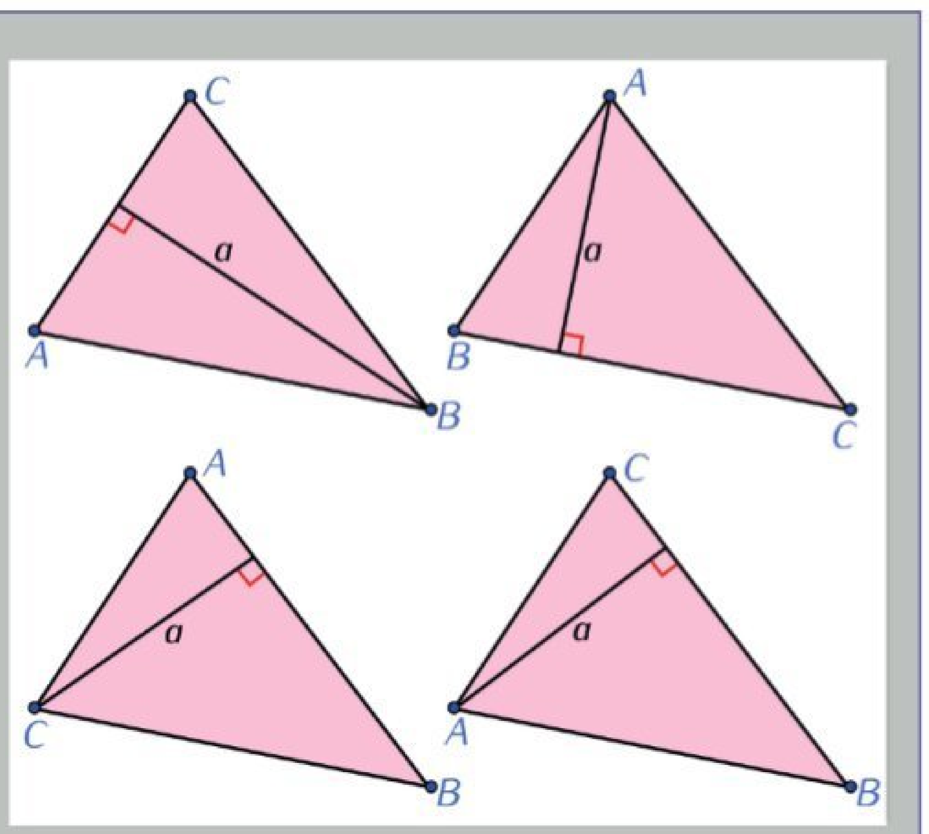
In de roze driehoek in figuur 3 is door een leerling een blauwe lijn getekend. Deze blauwe lijn staat loodrecht op zijde *PQ*, de basis. De blauwe lijn is tevens vanuit een hoekpunt van de driehoek getekend. De leerling heeft het idee dat hij de hoogte van de driehoek behorend bij basis *PQ* getekend heeft. Wij zien wel dat de blauwe lijn niet de hoogte van de driehoek die hoort bij basis *PQ* aangeeft, maar blijkbaar heeft de leerling de essentiële kenmerken van het bepalen van de hoogte bij een bepaalde basis nog niet helemaal in de vingers.

Variatietheorie is door de studenten ingezet om de verschillende essentiële kenmerken door leerlingen te laten ontdekken. Het eerste werkblad dat de leraren in opleiding voor hun onderzoeksles maakten was het werkblad in figuur 4.

Werkblad 1

Geef bij elke driehoek op je werkblad aan of lijn *a* de bijbehorende hoogte is bij zijde *AB*.

Dus: kijk naar de juiste zijde.



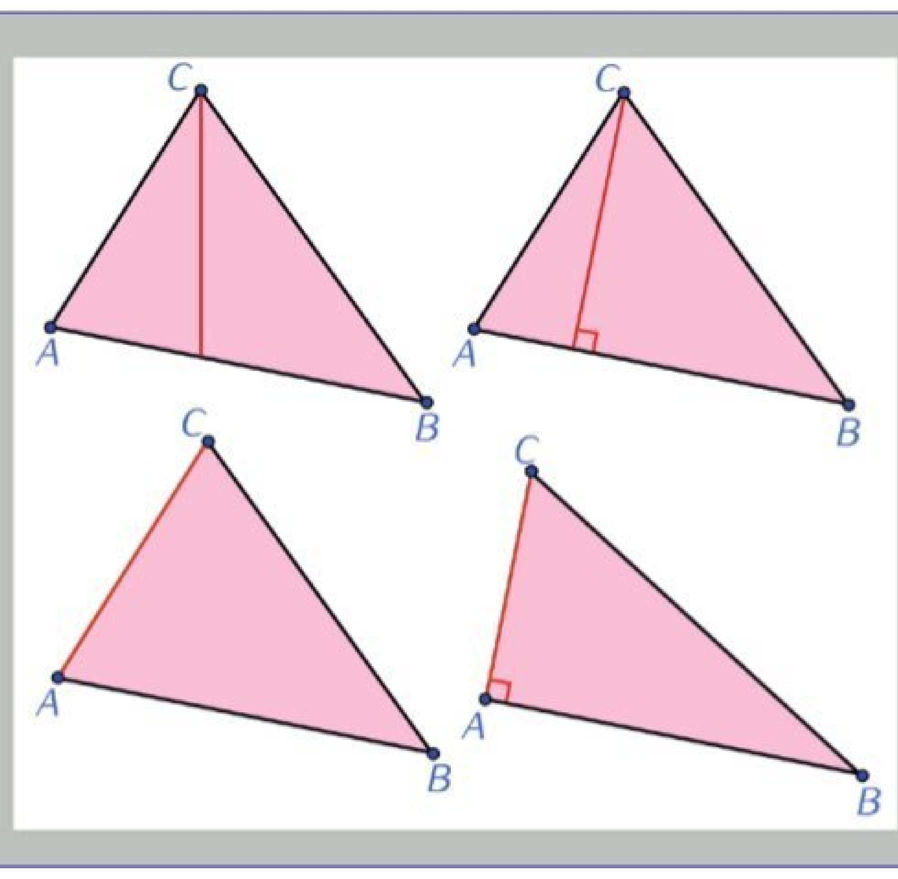
figuur 4

De vraag aan de leerlingen in klas 2 was om aan te geven of de getekende lijn *a* de bijbehorende hoogte is van zijde *AB*. Zoals te zien is in figuur 2 is driehoek *ABC* invariant, en hoogte a wordt ook steeds aangegeven. De variatie zit in de plek van zijde *AB*, en hoogte *a* staat niet steeds op *AB*. Het doel was om goed te controleren of hoogte en zijde bij elkaar horen.
Leerlingen mochten dit in tweetallen bespreken, daarna werd er nabesproken en werd de conclusie getrokken: 'elke zijde heeft een eigen bijbehorende hoogte'.

Werkblad 2

Geef bij elke driehoek aan of de rode lijn de bijbehorende hoogte is bij zijde *AB*.

Dus: de hoogte moet loodrecht zijn / kortste afstand hebben.



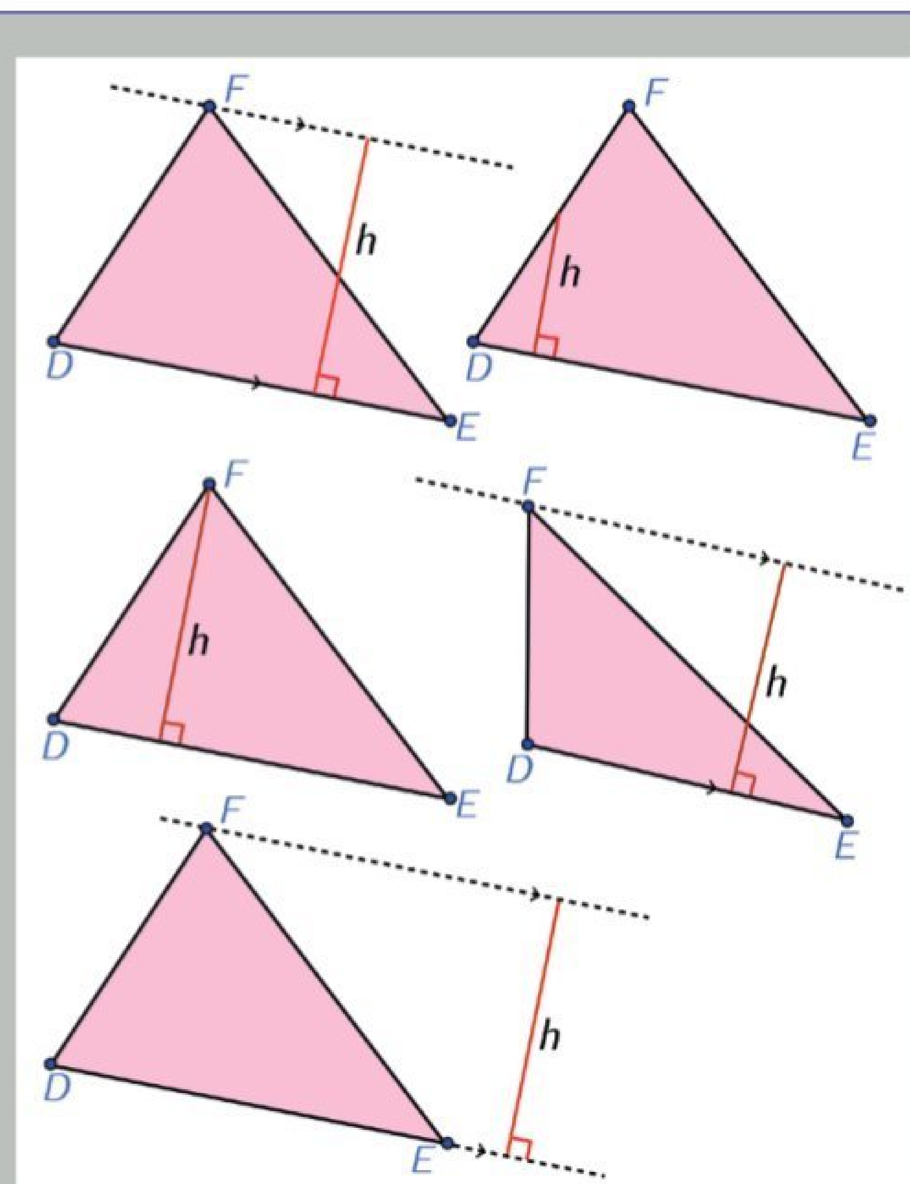
figuur 5

Het tweede werkblad, zie figuur 5, bevatte de vraag of de rode lijn de bijbehorende hoogte is van zijde *AB*. Op dit werkblad is de driehoek *ABC* (nagenoeg) invariant, en zitten *A*, *B* en *C* steeds op dezelfde plek. Steeds is er een lijn getekend van hoekpunt *C* naar basis *AB*. De variatie zit hier in de hoek die de lijn uit *C* maakt met *AB*. Het doel was om te herkennen dat de hoogte loodrecht staat op de bijbehorende zijde. Dus niet alleen heeft elke zijde een bijbehorende hoogte; deze hoogte staat loodrecht op de bijbehorende zijde.

Werkblad 3

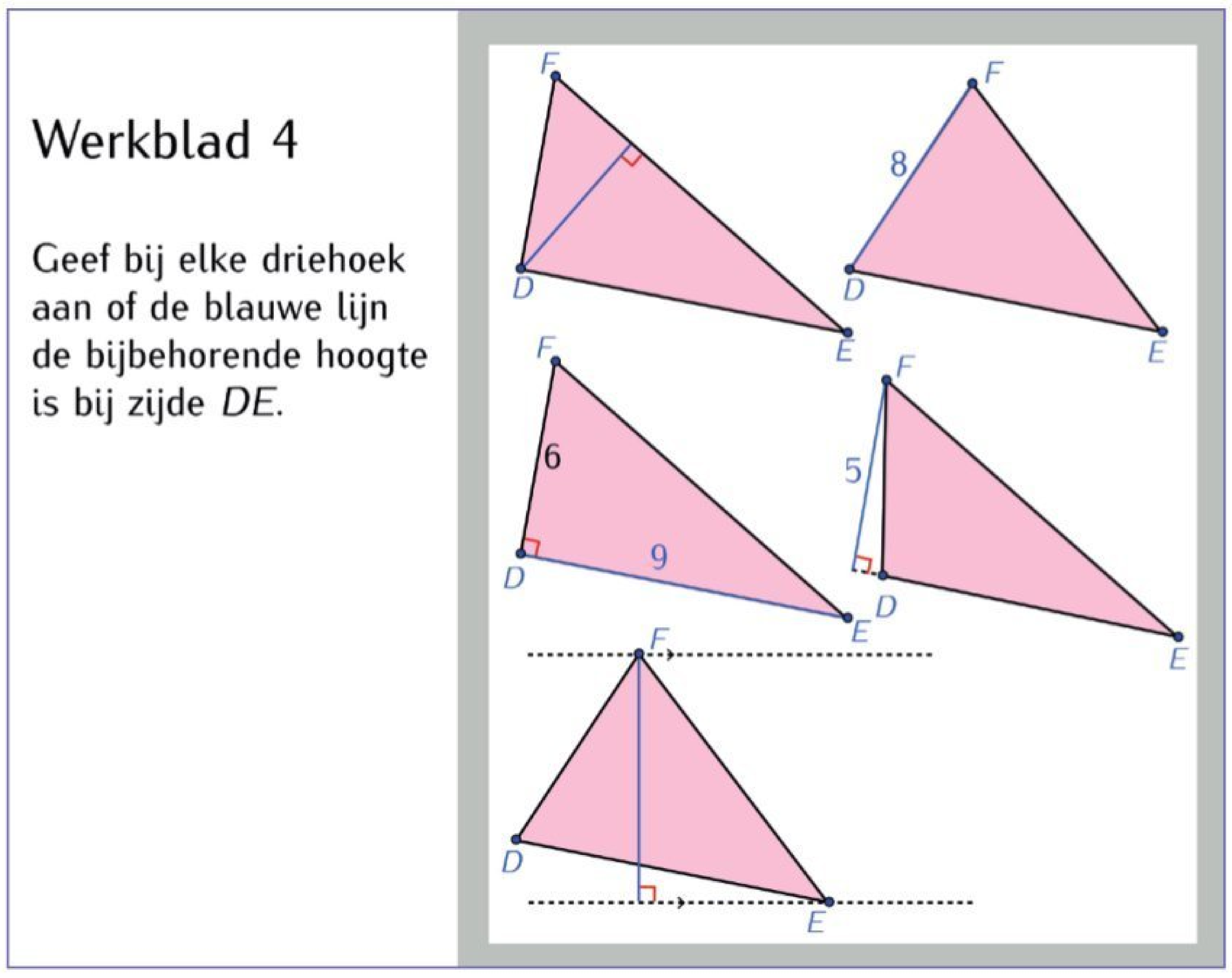
Geef bij elke driehoek aan of lijn *h* de bijbehorende hoogte is bij zijde *DE*.

Dus: hoogte is de kortste afstand tussen de gekozen zijde en het hoogste punt.



figuur 6

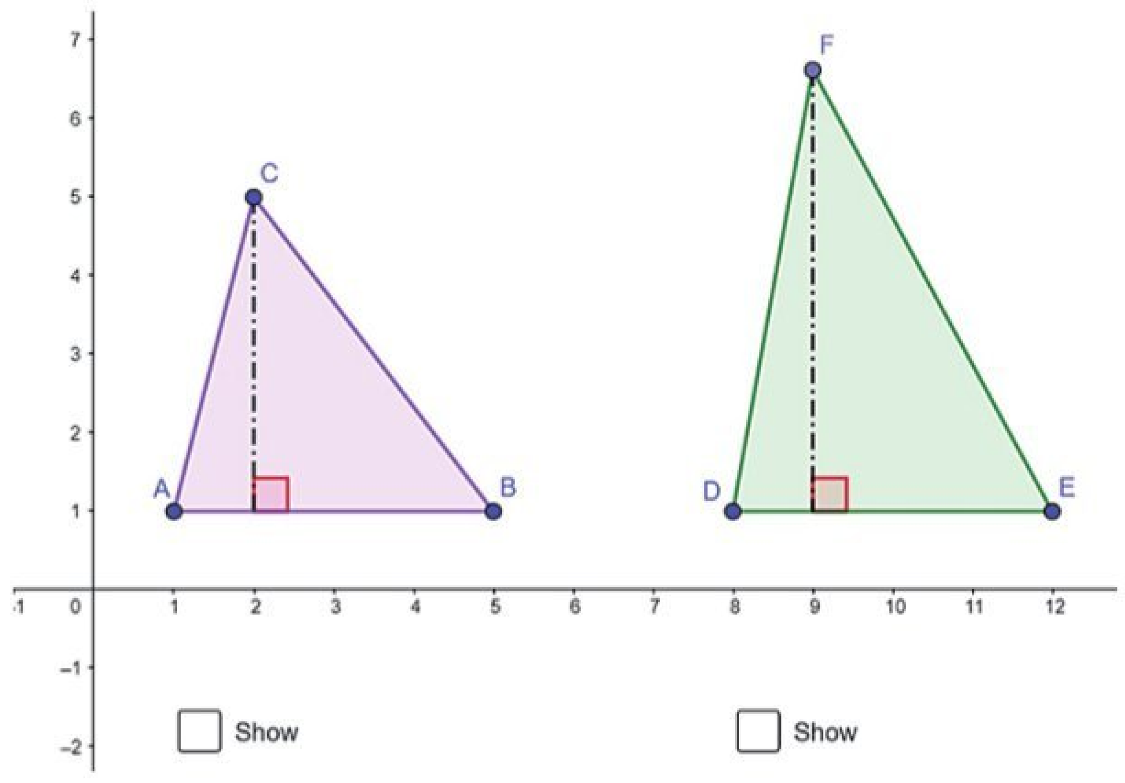
Het derde werkblad ging (weer) over het bepalen of een gegeven lijn de bijbehorende hoogte is van een zijde, in dit geval *DE*, die steeds op dezelfde plek zat, zie figuur 6. In dit geval is invariant dat er een willekeurige driehoek met vaste basis en loodrecht daarop een lijnstuk getekend is; de variatie zit in de hoogte en de locatie van de loodrecht getekende lijn. Oftewel: niet altijd geeft de getekende lijn de hoogte aan, en de loodrecht getekende lijn komt ook niet altijd uit een hoekpunt. Het doel was dat leerlingen herkennen dat de hoogte de kortste afstand is tussen de basis en het hoogste tegenoverliggende punt – maar tevens dat het niet noodzakelijk is dat deze afstand altijd weergegeven wordt door de hoogtelijn vanuit dat punt!



figuur 7

In het vierde werkblad, zie figuur 7, worden verschillende aspecten gecombineerd. Invariant is een driehoek met een blauw lijnstuk vanuit een hoekpunt; variatie zit erin dat het blauwe lijnstuk niet altijd de hoogte is behorend bij de gegeven basis *DE*. Het doel was dat leerlingen herkennen of een bepaald lijnstuk in de driehoek de hoogte ervan aangeeft bij een gegeven basis. In tabel 1 staan de verschillende kenmerken nog een keer op een rijtje.

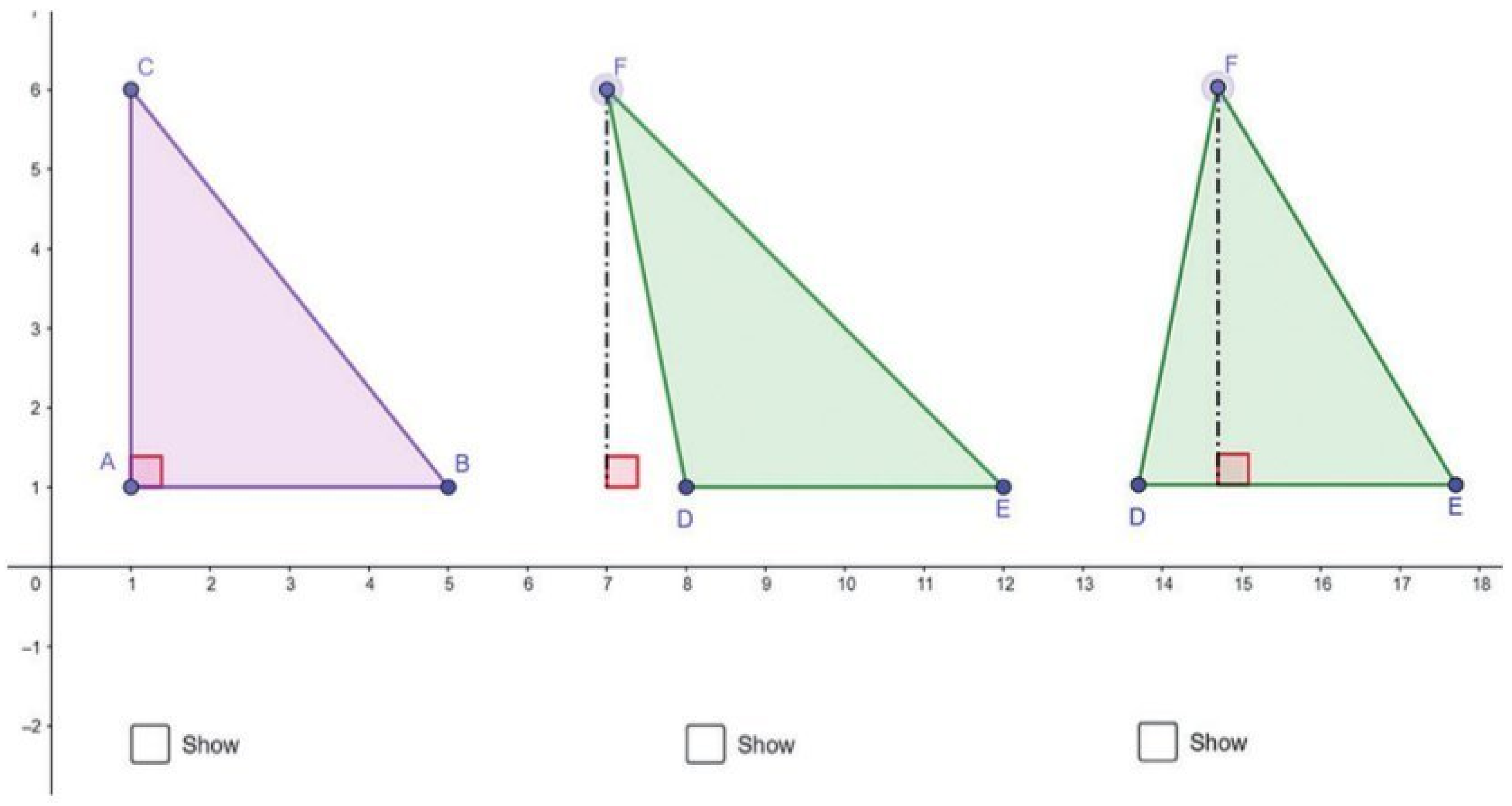
Hierna werd GeoGebra ingezet om dynamisch te laten zien wat er gebeurt met de oppervlakte als je de hoogte varieert en de rest gelijk houdt [4], zie ook figuur 8, en wat er gebeurt met de driehoek als je de hoogte en de basis gelijk houdt maar de plek van het hoogste hoekpunt varieert [5], zie figuur 9. De toegevoegde waarde van GeoGebra is hier duidelijk het dynamisch kunnen laten zien van het effect van de variatie op verder invariant gehouden kenmerken.



figuur 8

Invariant	Variatie	Kenmerkend aspect	Leerdoel
Driehoek *ABC* met een gegeven hoogtelijn *a*	Zijde *AB* zit niet steeds op dezelfde plek; hoogtelijn *a* staat niet steeds op *AB*	Hoort de gegeven hoogte *a* bij de gevraagde zijde *AB*?	Het kunnen herkennen of een hoogte bij een zijde hoort
Driehoek met zijde *AB* als basis, waarop een lijnstuk is getekend van *AB* naar hoekpunt *C*	De hoek die het getekende lijnstuk maakt met *AB*	Staat het getekende lijnstuk loodrecht op *AB*?	Herkennen dat de hoogte loodrecht staat op de bijbehorende zijde
Willekeurige driehoek met vaste basis en loodrecht daarop een lijnstuk	De hoogte van het loodrecht getekende lijnstuk	Is het loodrechte lijnstuk op de basis gelijk aan de hoogte van de driehoek?	Herkennen hoe je kunt aangeven wat de hoogte van de driehoek is
Willekeurige driehoek met vaste basis en een blauw lijnstuk vanuit een hoekpunt	Het blauwe lijnstuk is niet altijd de hoogte behorend bij de gegeven basis	Alle voorgaande aspecten samen	Herkennen of een bepaald lijnstuk in de driehoek de hoogte ervan aangeeft bij een gegeven basis

tabel 1



figuur 9

"Leerlingen gaven achteraf aan de onderlinge discussies te waarderen!"

Resultaten en reflectie

We laten hierbij de leraren in opleiding aan het woord:

'Alledrie hebben wij ervaren dat onze eigen kennis van "de hoogte van een driehoek bepalen" werd verdiept en verbreed door de eerste, onderzoekende fase van de Learning Study: de pre-tests, het zelf vaststellen van de essentiële kenmerken van het onderwerp, en het ontwikkelen van de werkbladen. Veel termen en definities, nodig bij het aanleren van het concept "hoogte van een driehoek", bleken voor discussie vatbaar. Zo wordt er in verschillende methodes gesproken over "basis en hoogte", maar ook over "zijde en bijbehorende hoogte". Je kunt je zelfs gaan afvragen waarom bij een rechthoek altijd gesproken wordt van lengte en breedte: waarom hier niet van zijde en (bijbehorende) hoogte? Net als in een parallellogram? En als je het hebt over de oppervlakte van de driehoek: waarom omlijsten met een rechthoek? Waarom niet met een parallellogram? Doordat wij het betreffende onderwerp zelf beter doorgrondden en de verschillende kenmerkende aspecten stap voor stap aanboden aan de hand van de werkbladen konden we de ruimte nemen om de leerlingen vragen te stellen en ze met elkaar in discussie te laten gaan zonder dat we zelf de draad kwijtraakten van ons verhaal, omdat we het onderwerp zelf van alle kanten konden "vastpakken", wat er ook voorbijkwam. Hierdoor werd het denken van de leerlingen en daarmee de grote diversiteit aan voorkennis verrassend goed zichtbaar en werd het mogelijk om op vele verschillende misconcepties in te gaan. Wanneer de leerlingen naar aanleiding van de werkbladen aan elkaar gingen uitleggen (waar nodig aangevuld door de docent) werd erg duidelijk dat ze betrokken waren, van zich durfden te laten horen en dat er hoorbaar kwartjes vielen. De leerlingen gaven zelf achteraf ook aan de onderlinge discussies te waarderen!'

'Het geven van meer inzicht aan leerlingen wordt in de opleiding erg gepromoot. Wat wij als prettig hebben ervaren is dat de variatietheorie concrete handvatten geeft om dit inzicht betreffende een onderwerp stap voor stap met leerlingen te kunnen opbouwen tot het plaatje compleet is door de essenties van een onderwerp duidelijk te maken en daarna te combineren.
Het inzicht dat bij ons als docenten ontstond is dat het zo kort mogelijk uitleggen van de regels omtrent een wiskundig concept vaak zijn doel voorbijschiet, omdat leerlingen niet aanhaken vanuit hun eigen kennis en een trucje aanleren dat bij een iets afwijkende opgave niet meer op dezelfde manier toe te passen is. Door de leerlingen te stimuleren om met elkaar na te denken over de essentiële kenmerken van het concept zagen we dat leerlingen daarna ook bij een denkvraag beter zelf nadachten.
Daarnaast werd voor ons de toegevoegde waarde van het gebruik van ICT zeer duidelijk. Zo gebruikten wij GeoGebra als middel om bepaalde, niet-essentiële kenmerken van de hoogte van een driehoek zichtbaar te variëren, zoals het verplaatsen van de lijn die de hoogte aangeeft van links naar rechts.'

Ter afsluiting

De komende jaren wordt in de lerarenopleiding wiskunde Learning Study door groepjes studenten toegepast in hun afsluitende praktijkonderzoek op school. Hierbij wordt de manier waarop de Learning Study wordt vormgegeven steeds aangepast aan de behoeften van de studenten. Het doel is dat de leraren in opleiding hierdoor diepere vak- en vakdidactische kennis opdoen, en daarmee betere leraren worden.

>

Noten

[1] Marton, F., & Booth, S. (1997). *Learning and Awareness*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

[2] Marton, F. (2015). *Necessary Conditions of Learning*. Taylor & Francis: New York.

[3] Zie: *https://www.geogebra.org/m/ffS52xn3*

[4] Zie: *https://www.geogebra.org/classic/qtkcs6xs*

[5] *https://www.geogebra.org/classic/wktfyprc*

Over de auteurs

Dédé de Haan is lerarenopleider wiskunde aan NHLStenden Hogeschool. Sinds januari 2021 is ze gestart met een promotieonderzoek bij het Freudenthal Instituut. In dit onderzoek wil ze nagaan hoe de implementatie van Learning Study (Lesson Study met gebruik van variatietheorie) kan leiden tot betere leraren wiskunde.
E-mailadres: *d.dehaan@uu.nl*
Hella de Vries, Evelien van Aarem en Jildert Jellesma hebben als student in de lerarenopleiding wiskunde in het voorjaar van 2021 een Learning Study uitgevoerd o.l.v. Dédé de Haan.
